CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1986 CONCOURS SCIENCES

EPREUVE A OPTION : OPTION M

MATHEMATIQUES II *Durée : 4 heures*

E est un K−espace vectoriel, K étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La dimension de E est finie ou non, selon les questions. La loi $\circ$ est la loi de composition habituelle. $M_n(K)$ est l'ensemble des matrices d'ordre n , à coefficients dans K .

L(E) est l'ensemble des endomorphismes de E . GL(E) est l'ensemble des automorphismes de E . On note $\mathrm{Mat}(f, B)$ la matrice de f dans la base B .

Pour f et g dans L(E), on note $f * g$ l'endomorphisme $f \circ g - g \circ f$.

Les différentes parties du problème étudient des propriétés diverses de la loi $*$, elles sont largement indépendantes.

− I −

Dans cette partie, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ et dim E est finie. On pose $\dim E = n$.

1) Soit f de L(E) tel que pour tout g de GL(E) , on ait : $f * g = 0$

1.1) Montrer que, pour tout x non nul de E , la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée. On pourra supposer que $\big(x, f(x)\big)$ est libre, et considérer un automorphisme g tel que :

$$g(x) = x \; ; \qquad g\big(f(x)\big) = x + f(x) \; .$$

1.2) E est référé à une base B , notée (e_i) . Étudier $f(e_i + e_j)$. En déduire que f est une homothétie.

2) Caractériser f de L(E) tel que, pour tout h de L(E) , on ait $f * h = 0$.

3) On se propose de démontrer la question précédente par une autre méthode. Soit x un vecteur non nul de E et $\mathrm{Vect}(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x . Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E . On considère le projecteur p sur $\mathrm{Vect}(x)$, parallèlement à F . Montrer que $\big(x, f(x)\big)$ est liée, en utilisant p . Conclure.

− II −

Dans cette partie $K = \mathbb{R}$.

On étudie f et g de L(E) tels que $f * g = I_E$.

1) Soient A, B et C dans $M_n(\mathbb{R})$. On note tr(A) la trace de A . Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, puis $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA)$.

2) On suppose dans cette question que $\dim E = n$. Soit f dans L(E) .

2.1) Montrer qu'on peut définir $\mathrm{tr}(f)$ par $\mathrm{tr}\big(\mathrm{Mat}(f, B)\big)$, B étant une base quelconque de E .

2.2) Montrer qu'il n'existe pas g de L(E) telle que $f * g = I_E$.

3) Dans cette question, E est un espace vectoriel normé, de dimension quelconque. $L_C(E)$ est l'ensemble des endomorphismes continus de E . On rappelle qu'on peut définir dans $L_C(E)$, la norme de f par :

Tournez la page S.V.P.

$$|||f||| = \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{||f(x)||}{||x||} .$$

3.1) Montrer que, pour f et g de $L_C(E)$, on a :

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \cdot |||g||| .$$

3.2) Soient f et g de $L_C(E)$ tels que $f * g = I_E$. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$f * g^{k+1} = (k+1)\, g^k .$$

Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$k + 1 \leqslant 2\, |||f||| \cdot |||g||| .$$

A quelle conclusion aboutit-on ?

– III –

Dans cette partie E est $\mathbb{R}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit dans L(E), d et f par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}[X],\ d\big(P(X)\big) = P'(X)\ ;\ f\big(P(X)\big) = XP(X) .$$

$\big(P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)\big)$.

1) Étudier $d * f$. Ce résultat est-il en contradiction avec le résultat de II.2 ?

2) Expliciter $f^n * d$ en fonction de f et n .

3) Soient p et n deux entiers naturels tels que $n \geqslant p \geqslant 1$.

3.1) T(X) étant donné dans $\mathbb{R}[X]$, calculer la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $X^n T(X)$, notée $\big(X^n.T(X)\big)^{(p)}$.

3.2) Montrer qu'il existe une liste de réels α_j non nuls, tels que :

$$f^n * d^p = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\, f^{n-j} \circ d^{p-j} .$$

Expliciter α_j en fonction de $(j\,!)$ et des coefficients du binôme de Newton.

– IV –

On suppose dans cette partie que $K = \mathbb{C}$, que E est de dimension finie supérieure ou égale à 2, et qu'il existe f non nul de L(E), et g de L(E), tels que :

$$f * g = f .$$

1) Déterminer $\mathrm{tr}(f)$.

2) Montrer que pour tout μ de $\mathbb{C}$, on a :

$$f \circ [g + \mu I_E] = [g + (\mu + 1)\, I_E] \circ f .$$

Montrer que $\det(f) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

3) Dans cette seule question, on suppose que $\dim E = 2$. Montrer que $f^2 = 0$, et qu'il existe une base $B = (e_1, e_2)$ de E , telle que :

$$\mathrm{Mat}(f, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1) Montrer que e_1 est vecteur propre commun à f et g .

3.2) Montrer alors l'existence de f non nul et de g , tels que $f * g = f$.

4) On revient au cas général où $\dim E = n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est stable par g . En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

- V -

Dans cette partie, $K = \mathbb{R}$. On suppose que $\dim E = n$, $n \geqslant 2$, et que le rang de $f * g$ est égal à 1. On pose $f * g = h$.

1) Soit σ de $L(E)$, de rang égal à 1, tel que $\mathrm{tr}(\sigma) = 0$. Montrer que σ est nilpotent. Soit x non nul dans $\sigma(E)$. Montrer que x est vecteur propre de σ .

2) Soit x non nul dans $n(E)$.

2.1) Montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \; ; \; f^k(x) \in \mathrm{Ker}\, h \; .$$

[On pourra utiliser II.1.)]

2.2) Soit S_x le sous-espace vectoriel engendré par $\left\{ f^k(x) \; ; \; k \in \mathbb{N} \right\}$.

Montrer que $\dim S_x \leqslant n - 1$.

3) Montrer que si $n = 2$, le polynôme caractéristique de f est scindé.